Ortogonalitate

1. Fie V un spaţiu euclidian, $L \subset V$ şi $x \in V$. Definim
$$d(x, L) := \inf_{y \in L} ||x - y||.$$
Să se arate:
   (a) $d(x, L)$ este egală cu lungimea perpendicularei din x pe L;
   (b) Vectorul din L cel mai apropiat de x este proiecţia lui x pe L;
   (c) Pentru orice $y \in L$, $d(x + y, L) = d(x, L)$.
2. Determinaţi cîte o bază ortonormată în următoarele spaţii:
   (a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3y = 0\right\}$;
   (b) $\langle\{(0, 2, 1), (1, -2, -1)\}\rangle$;
   (c) $(1, -1, 2)^{\perp}$.
3. Determinaţi o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ pornind de la baza $\{(1, 2, 3), (4, 5, 0), (2, 3, -1)\}$.
4. Determinaţi forma canonică prin izometrii
   (a) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
   (b) $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;
   (c) $2x_1x_4 + 6x_2x_3$.
5. Fie V spaţiul vectorial $\left\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} | f \text{ este de clasă } C^\infty\right\}$, împreună cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Determinaţi o bază ortonormată în subspaţiul $W = \langle\left\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\right\}\rangle$.
6. Fie $a \in \mathbb{R}^3$ şi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \times x$. Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători.
7. Fie rotaţia de unghi $\pi/3$ în jurul vectorului $(1, 2, 1)$. Determinaţi matricea sa în raport cu baza canonică.
8. Fie $S^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | ||x|| = 1\right\}$, Q o formă pătratică şi $\kappa_1 \leq \kappa_2$ valorile sale proprii. Arătaţi că
$$\inf_{x \in S^1} Q(x) = \kappa_1 \text{ şi } \sup_{x \in S^1} Q(x) = \kappa_2$$
şi aceste valori sînt atinse pe vectorii proprii corespunzători.