

Forme biliniare și forme pătratice

1. Fie K un corp cu $\text{char}K \neq 2$, V un K -spațiu vectorial și $B(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$ o formă bilineară. Arătați că B se poate descompune în suma dintre o formă simetrică și una anti-simetrică.
2. Fie $B(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$ o formă biliniară simetrică. Arătați că B este nedegenerată (adică $B(x, y) = 0$ pentru orice $y \in V$ implică $x = 0$) dacă și numai dacă $x \mapsto B(x, \cdot) : V \rightarrow V^*$ este un izomorfism.
3. Fie B o formă biliniară nedegenerată pe spațiul vectorial V și $W \subset V$. Notăm cu $W^\perp = \{x \in V \mid B(x, y) = 0, \forall y \in W\}$. Arătați că
 - (a) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;
 - (b) $(W^\perp)^\perp = W$.
4. Fie V un spațiu vectorial și B o formă biliniară simetrică. Notăm cu $\text{rad}_B(V) = V^\perp$. Determinați $\text{rad}_B(V)$ pentru $V = \mathbb{R}^4$ și $B(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1$.
Calculați $\dim \text{rad}_B(V)$ pentru o formă bilineară peste un spațiu V de dimensiune n .
5. Fie $V = \mathbb{R}^4$ și forma biliniară $B(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3$. Determinați $\dim V_1$ și $\dim V_2$, unde $V_1 = \{x \in V \mid B(x, y) = 0\}$ și $V_2 = \{y \in V \mid B(x, y) = 0\}$.
6. Fie K un corp de caracteristică 2, V un K -spațiu vectorial și $Q : V \rightarrow K$ o formă pătratică. Arătați că forma biliniară asociată este anti-simetrică. Arătați că forma pătratică $Q : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$, $Q(x, y) = xy$ nu este diagonalizabilă.