# Sisteme de generatori şi sisteme liniar-independente

1. Determinaţi dimensiunea spaţiului generat de următorii vectori

   (a)
   $$x_1 = (1,2,3)\,; x_2 = (4,5,6)\,; x_3 = (7,8,9)\,; x_4 = (10,11,12)\,.$$

   (b)
   $$x_1 = (1,-1,0,0)\,; \quad x_2 = (0,1,-1,0)\,; \quad x_3 = (0,0,1,-1)\,;$$
   $$x_4 = (0,0,0,1)\,; \quad x_5 = (7,-3,-4,5)\,.$$

2. Extrageţi cîte o bază din sistemele de vectori următoare:

   (a)
   $$x_1 = (-1,4,-3,-2)\,; x_2 = (3,-7,5,3)\,; x_3 = (3,-2,1,0)\,; x_4 = (-4,1,0,1)\,.$$

   (b)
   $$x_1 = (3-i, 1-2i, -7+5i, 4+3i)\,; \quad x_2 = (1+3i, 1+i, -6-7i, 4i)\,;$$
   $$x_3 = (0,1,1,-3)\,.$$

3. Determinaţi toate bazele (de cardinal maxim) care se pot extrage dintre vectorii
   $$x_1 = (1+i, 1-i, 2+3i)\,; \quad x_2 = (i,1,2)\,; \quad x_3 = (1-i, -1-i, 3-2i)\,;$$
   $$x_4 = (4, -4i, 10+2i)\,.$$

4. Verificaţi că vectorii $e_1, \ldots, e_n$ formează o bază şi scrieţi descompunerea vectorului $x$ în raport cu această bază:

   (a)
   $$e_1 = (2,2,-1)\,, e_2 = (2,-1,2)\,, e_3 = (-1,2,2)\,; x = (1,1,1)\,.$$

   (b)
   $$e_1 = (1,2,1,1)\,, \quad e_2 = (2,3,1,0)\,, \quad e_3 = (1,2,1,4)\,,$$
   $$e_4 = (4,2,-1,-6)\,; \quad x = (0,0,2,7)\,.$$

5. Descompuneţi polinomul $X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - X + 1$ în raport cu bazele

(a) $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$;

(b) $\{1, X+1, X^2+1, X^3+1, X^4+1, X^5+1\}$;

(c) $\{1+X^3, X+X^3, X^2+X^3, X^3, X^4+X^3, X^5+X^3\}$

6. Determinaţi dimensiunea şi cîte o bază în subspaţiul generat de vectorii

$$x_1 = (1, 2, 2, -1); \quad x_2 = (2, 3, 2, 5); \quad x_3 = (-1, 4, 3, -1);$$
$$x_4 = (2, 9, 3, 5).$$

7. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice de rang $r$. Fie $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^m$ coloanele lui $A$. Arătaţi că $\dim \mathrm{Sp}\{c_1, \ldots, c_n\} = r$. Formulaţi un rezultat analog pentru liniile lui $A$.