Probleme 0

1. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+3y+z=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+4y+z=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+4y+z=0; \end{cases}$$

2. Daţi exemplu de sistem de două ecuaţii cu două necunoscute avînd o infinitate de soluţii.

3. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 12 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ şi $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{M}_{4,1} | A \cdot x = 0\}$. Arătaţi că există $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ astfel încît pentru orice element $x \in \mathcal{S}$ există în mod unic α şi $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încît $x = \alpha x_1 + \beta x_2$.

4. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -8 & 3 \\ -12 & 13 & -19 & 7 \\ -8 & 8 & -11 & 4 \\ -8 & 8 & -11 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Determinaţi $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} | A - \lambda I_4$ nu e inversabilă $\}$.

   (b) Pentru fiecare $\lambda \in \sigma(A)$ determinaţi $V_\lambda = \{x \in \mathcal{M}_{4,1} | Ax = \lambda x\}$.

   (c) * Arătaţi că există $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{M}_{4,1}$ astfel încît

      i. $\forall i \in \overline{1,4}, \exists \lambda(i) \in \sigma(A)$ a.î. $x_i \in V_{\lambda(i)}$;

      ii. $\forall x \in \mathcal{M}_{4,1}, \exists! a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ astfel încît $x = \sum_i a_i x_i$.