Calcul Numeric – Tema #3

Ex. 1 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Să se calculeze valorile proprii ale matricei A.

Ex. 2 Pentru matricea de la Ex. 1 să se calculeze în Matlab:

a) $\| A \|_2 = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \sqrt{\lambda_i}$, unde $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ sunt valorile proprii ale matricei $A^T A$;

b) Numărul de condiţionare $\kappa_2(A) = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \dfrac{\max_{i=\overline{1,3}} \sqrt{\lambda_i}}{\max_{j=\overline{1,3}} \sqrt{\lambda_j}}$, unde $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ sunt valorile proprii ale matricei $A^T A$.

Ex. 3 Fie sistemul $Ax = b$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{cu soluţia} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Aflaţi în Matlab soluţia sistemului $Ax = b$ folosind funcţia $inv(A)$;

b) Fie $b + \delta b = (32,1;\ 22,9;\ 33,1;\ 30,9)^T$ vectorul perturbat. Să se rezolve în Matlab sistemul $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Ce observaţi în soluţia obţinută?

c) Considerăm sistemul perturbat $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ unde

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}$$

Să se rezolve acest sistem. Ce observaţi în soluţia sistemului perturbat?

d) Să se calculeze în Matlab $\kappa_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty$. Să se calculeze şi să se compare mărimile $\dfrac{\| \delta x \|_\infty}{\| x \|_\infty}$ şi $\kappa_\infty(A) \dfrac{\| \delta b \|_\infty}{\| b \|_\infty}$. Ce observaţi?

e) Să se afle în Matlab $\kappa_2(A)$.

Ex. 4 Să se rezolve conform algoritmilor: metoda Gauss fără pivotare, metoda Gauss cu pivotare parţială şi metoda Gauss cu pivotare totală următorul sistem:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Ex. 5 Să se construiască în Matlab fişierul de tip function **SubsDesc.m** conform sintaxei x=**SUbsDesc**(A, b) care rezolvă numeric sisteme liniare superior triunghiulare conform Algoritmului (metoda substituţiei descendente).

Ex. 6 Să se implementeze numeric metodele Gauss fără pivotare, cu pivotare parţială şi cu pivotare totală construindu-se funcţiile x =**GaussFaraPiv**(A, b), x =**GaussPivPart**(A, b), respectiv x =**GaussPivTot**(A, b) şi să se apeleze aceste funcţii pentru datele de la Ex. 4.